福建省《高等代数》与《线性代数》课程建设第23次研讨会

形变质不变——
分块矩阵的初等变换

华侨大学 林增强

2023年12月17日

福建 福州

目录

矩阵的初等变换是高等代数与线性代数最重要的技巧之一，能解决高等代数与线性代数的大部分的计算问题。矩阵的初等变换蕴含许多哲学辩证思想，例如“形变质不变”、“量变引质变”等哲学思想。

分块矩阵的初等变换是高等代数与线性代数教学中的一个重点与难点，近年来在考研题中具有广泛的应用，是解决一些难题的重要工具，但在一些教材中并没有系统地介绍。

分块矩阵的初等变换一方面可以“化繁为简”——“打洞”，另一方面可以“化简为繁”——“补洞”。探索分块矩阵的初等变换中的“变”与“不变”，具有重要的意义。

1. 分块矩阵的初等变换

定义 分块矩阵的以下三个变换称为分块初等变换：

（1）互换分块矩阵的两行（列）；

（2）某一行（列）左乘（右乘）可逆矩阵；

（3）某一行（列）左乘（右乘）矩阵加到另一行（列）。

注意：左行右列原则！

定义 对分块单位矩阵做一次分块初等变换得到的矩阵称为**分块初等矩阵**。

命题 分块初等矩阵是可逆矩阵。

例如，

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ C & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -C & E \end{pmatrix}.$$

定理 对分块矩阵做一次分块初等行（列）变换，相当于左乘（右乘）相应的分块初等矩阵。

如： (1) $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+Cr_1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}+CA_{11} & A_{22}+CA_{12} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ C & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}+CA_{11} & A_{22}+CA_{12} \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1C} \begin{pmatrix} A_{11}C & A_{12} \\ A_{21}C & A_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}C & A_{12} \\ A_{21}C & A_{22} \end{pmatrix}$.

2.分块初等变换与矩阵的秩

定理 分块矩阵的初等变换不改变矩阵的秩。

例 1（18 高数一）设 A,B 为 n 阶矩阵，则（　）.

（A）$r(A,AB)=r(A)$；　　（B）$r(A,BA)=r(A)$；

（C）$r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$；　　（D）$r(A,B)=r(A^T,B^T)$.

提示：（A）正确

$$(A,AB)\xrightarrow{c_2+c_1(-B)}(A,0).$$

例 2（21 高数一）设 A,B 均为 n 阶实矩阵，则下列不成立的是（　）。

(A) $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^TA \end{pmatrix}=2r(A)$；　(B) $r\begin{pmatrix} A & AB \\ 0 & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$；

(C) $r\begin{pmatrix} A & BA \\ 0 & AA^T \end{pmatrix}=2r(A)$；　(D) $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ BA & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$.

提示：（C）不成立

$$\begin{pmatrix} A & AB \\ 0 & A^T \end{pmatrix}\xrightarrow{c_2+c_1(-B)}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix} A & 0 \\ BA & A^T \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-B)r_1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix}$$

例 3（23 高数一）设 n 阶方阵 A,B,C 满足 $ABC=0$， 记

$$r\begin{pmatrix} 0 & A \\ BC & E \end{pmatrix}=r_1, r\begin{pmatrix} AB & C \\ 0 & E \end{pmatrix}=r_2, r\begin{pmatrix} E & AB \\ AB & 0 \end{pmatrix}=r_3.$$

则（　　）.

(A) $r_1 \le r_2 \le r_3$； (B) $r_1 \le r_3 \le r_2$； (C) $r_3 \le r_2 \le r_1$； (D) $r_2 \le r_1 \le r_3$.

提示：（B）正确.

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ BC & E \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - Ar_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ BC & E \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2(-BC)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} AB & C \\ 0 & E \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - Cr_2} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - ABr_1} \begin{pmatrix} E & AB \\ 0 & -(AB)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_1(-AB)} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -(AB)^2 \end{pmatrix}$$

命题 设 A 是 $m\times k$ 矩阵，B 是 $l\times n$ 矩阵，则 $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq r(A)+r(B)$.

证明 设 $r(A)=r, r(B)=s$，则 A 有一个 r 阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = D_1 \neq 0$，

B 有一个 s 阶子式 $B\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_s \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_s \end{pmatrix} = D_2 \neq 0$，则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ 有一个 $r+s$ 阶子式

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r & m+p_1 & m+p_2 & \cdots & m+p_s \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r & k+q_1 & k+q_2 & \cdots & k+q_s \end{pmatrix} = D_1 D_2 \neq 0.$$

故 $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq r+s = r(A)+r(B)$.

注　（1）设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，则

$$r\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=3>2=r(A)+r(B).$$

(2) $r\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B).$

例 4 设 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $n\times s$ 矩阵， C 是 $s\times t$ 矩阵，证明:

$$r(AB)+r(BC)\leq r(ABC)+r(B).$$

提示

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-Ar_2} \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & BC \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1C} \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} -ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

例 5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{m\times n}$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{n\times s}$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{s\times t}$ 矩阵，证明：

$$\boldsymbol{r(AB)\geq r(A)+r(B)-n.}$$

提示：例 4 中取 $\boldsymbol{B=E_n}$。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{c}]{\boldsymbol{r}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E_n} \end{pmatrix}$$

例 6 设 A 为 $m\times n$ 矩阵， B 为 $n\times s$ 矩阵，若 $r(AB)=r(B)$， 证明：对任意 $s\times t$ 矩阵 C， 有 $r(ABC)=r(BC)$.

提示 $r(ABC)\leq r(BC)$.

由例4知， $r(AB)+r(BC)\leq r(ABC)+r(B)$.

注意到 $r(AB)=r(B)$,

故 $r(BC)\leq r(ABC)$.

例 7 设 A 是 n 阶方阵，证明：$A^2=A$ 当且仅当 $r(A)+r(A-E)=n$.

提示

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1} \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} A & A \\ -A & -E \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+Ar_2} \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ -A & -E \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2A,-Ec_2} \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

$$r(A)+r(A-E)=r(A-A^2)+n.$$

例 8 设 A 是 n 阶方阵，$(f(x),g(x))=1$．证明：$f(A)g(A)=$ 当且仅当 $r(f(A))+r(g(A))=n$．

提示：存在 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$．

$$\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+u(A)r_1} \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ u(A)f(A) & g(A) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+c_2v(A)} \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ u(A)f(A)+g(A)v(A) & g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E_n & g(A) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} E_n & g(A) \\ f(A) & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-f(A)r_1} \begin{pmatrix} E_n & g(A) \\ 0 & -f(A)g(A) \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1g(A),-r_2} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & f(A)g(A) \end{pmatrix}$$

$$r(f(A))+r(g(A))=n+r(f(A)g(A)).$$

例 9 设 A 是 n 阶方阵，证明：$r(f(A))+r(g(A))=r(d(A))+r(m(A))$，其中 $d(x),m(x)$ 分别是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式和最小公倍式.

提示：存在 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$.

设 $f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x)$，则 $m(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{d(x)}=f_1(x)g(x)$.

$$\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+u(A)r_1} \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ u(A)f(A) & g(A) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+c_2v(A)} \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ u(A)f(A)+g(A)v(A) & g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ d(A) & g(A) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} d(A) & g(A) \\ f(A) & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-f_1(A)r_1} \begin{pmatrix} d(A) & g(A) \\ 0 & -f_1(A)g(A) \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1g_1(A),-r_2} \begin{pmatrix} d(A) & 0 \\ 0 & m(A) \end{pmatrix}$$

3. 分块初等变换与行列式

命题 第三类分块初等变换不改变行列式的值。

注：（1）若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} = A_1$，其中 A_{ij} 是 $r_i \times s_j$ 矩阵，

则 $\begin{pmatrix} 0 & E_{r_2} \\ E_{r_1} & 0 \end{pmatrix} A = A_1$，从而 $|A_1| = (-1)^{r_1 r_2} |A|$.

（2）若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 C} \begin{pmatrix} A_{11}C & A_{12} \\ A_{21}C & A_{22} \end{pmatrix} = A_2$，

则 $A\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = A_2$，从而 $|A_2| = |C||A|$.

例 1 设 A 是 m 阶可逆矩阵，D 是 n 阶矩阵，证明：

（1）$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\left|D - CA^{-1}B\right|$.　（2）当 $AC = CA$ 时，$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

提示　(1)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - CA^{-1}r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

(2)

$$|A|\left|D - CA^{-1}B\right| = \left|AD - ACA^{-1}B\right|.$$

例 2 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，证明：$|E_m-AB|=|E_n-BA|$.

降阶公式

提示

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-Ar_2} \begin{pmatrix} E_m-AB & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-Br_1} \begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n-BA \end{pmatrix}.$$

例 3 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，其中 $m\geq n$，证明：

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA|. \qquad f_{AB}(\lambda)=\lambda^{m-n}f_{BA}(\lambda).$$

提示

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - Ar_2} \begin{pmatrix} \lambda E_m - AB & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda E_n r_2} \begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ \lambda B & \lambda E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - Br_1} \begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ 0 & \lambda E_n - BA \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & A \\ 0 & \lambda E_n - BA \end{vmatrix} = \lambda^n \begin{vmatrix} \lambda E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = \lambda^n \begin{vmatrix} \lambda E_m - AB & 0 \\ B & E_n \end{vmatrix}$$

$$\lambda^n|\lambda E_m - AB| = \lambda^m|\lambda E_n - BA|.$$

例 4 计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 1-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & 1-a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & 1-a_nb_n \end{vmatrix}$.

提示

$$\begin{vmatrix} 1-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & 1-a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & 1-a_nb_n \end{vmatrix} = \left| E_n - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \right|.$$

例 5 设$\boldsymbol{n}$维列向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$满足$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\mathbf{2}$， 求$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$的全部特征值.

提示

$$f_{\beta\alpha^T}(\lambda)=\lambda^{n-1}f_{\alpha^T\beta}(\lambda)=\lambda^{n-1}(\lambda-2)$$

例 6 设 A,B 为 n 阶方阵，证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$

提示

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \begin{pmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix}.$$

例 7 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶复方阵，证明：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+i\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-i\boldsymbol{B}|$.

提示

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2 i} \begin{pmatrix} A+iB & B \\ iA-B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+(-iE)r_1} \begin{pmatrix} A+iB & B \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}$$

4. 分块初等变换与逆矩阵

命题 设 $\begin{pmatrix} A & B & E & 0 \\ C & D & 0 & E \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} E & 0 & X & Y \\ 0 & E & Z & W \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$.

例 1、设 A 是 m 阶可逆矩阵，B 是 n 阶可逆矩阵，则

(1) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$.

提示 (3) $\begin{pmatrix} A & C & E & 0 \\ 0 & B & 0 & E \end{pmatrix} \xrightarrow{A^{-1}r_1} \begin{pmatrix} E & A^{-1}C & A^{-1} & 0 \\ 0 & B & 0 & E \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{B^{-1}r_2} \begin{pmatrix} E & A^{-1}C & A^{-1} & 0 \\ 0 & E & 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - A^{-1}Cr_2} \begin{pmatrix} E & 0 & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & E & 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

例 2 设 A,B,C 是 n 阶方阵，$M=\begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}$.

（1）证明：M 可逆当且仅当 AB 可逆；

（2）当 M 可逆，求 M^{-1}.

提示: (1) $\begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C-B & B \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} M \\ E_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \\ E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & C \\ E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -B \\ 0 & E_n \\ E_n & -E_n \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{c_1A^{-1},c_2(-B^{-1})} \begin{pmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & E \\ 0 & -B^{-1} \\ A^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2(-CA^{-1})} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \\ B^{-1}CA^{-1} & -B^{-1} \\ A^{-1}-B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$

例 3 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，且 E_m-AB 可逆，

证明 E_n-BA 可逆，并求 $(E_n-BA)^{-1}$.

提示

$$\begin{pmatrix} E_m & A & E_m & 0 \\ 0 & E_n-BA & 0 & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+Br_1} \begin{pmatrix} E_m & A & E_m & 0 \\ B & E_n & B & E_n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-Ar_2} \begin{pmatrix} E_m-AB & 0 & E_m-AB & -A \\ B & E_n & B & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{(E_m-AB)^{-1}r_1} \begin{pmatrix} E_m & 0 & E_m & -(E_m-AB)^{-1}A \\ B & E_n & B & E_n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-Br_1} \begin{pmatrix} E_m & 0 & E_m & -(E_m-AB)^{-1}A \\ 0 & E_n & 0 & E_n+B(E_m-AB)^{-1}A \end{pmatrix}$$

所以$\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n - BA \end{pmatrix}$可逆，且$\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n - BA \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_m & -(E_m - AB)^{-1}A \\ 0 & E_n + B(E_m - AB)^{-1}A \end{pmatrix}$.

又因为$\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n - BA \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_m & -A(E_n - BA)^{-1} \\ 0 & (E_n - BA)^{-1} \end{pmatrix}$,

所以$(E_n - BA)^{-1} = E_n + B(E_m - AB)^{-1}A$.

5. 分块初等变换与合同

命题 以下三种变换是分块矩阵的合同变换：

（1）对分块矩阵i,j列互换，i,j行互换；

（2）将分块矩阵第i列右乘可逆矩阵C，第i行左乘可逆矩阵C^T；

（3）将分块矩阵的第j列右乘矩阵C加到第i列，第j行左乘矩阵C^T加到第i行

$$\text{如}A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2C} \begin{pmatrix} A_{11}+A_{12}C & A_{12} \\ A_{21}+A_{22}C & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+C^Tr_2} \begin{pmatrix} A_{11}+A_{12}C+C^TA_{21}+C^TA_{22}C & A_{12}+C^TA_{22} \\ A_{21}+A_{22}C & A_{22} \end{pmatrix}=B$$

$$\text{则}\begin{pmatrix} E & C^T \\ 0 & E \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} E & 0 \\ C & E \end{pmatrix}=B,\quad \text{即}\begin{pmatrix} E & 0 \\ C & E \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} E & 0 \\ C & E \end{pmatrix}=B.$$

命题 分块实对称矩阵的合同变换不改变正惯性指数和负惯性指数.

例 1、设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & X^T \\ X & B \end{pmatrix}$ 是实对称矩阵，其中 $a_{11}<0$， B 是 $n-1$ 阶正定矩阵，

证明：（1） A 的符号差为 $n-2$；（2） $B-a_{11}^{-1}XX^T$ 是正定矩阵.

提示

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & X^T \\ X & B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1(-a_{11}^{-1}X^T)} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ X & B-a_{11}^{-1}XX^T \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+(-a_{11}^{-1}X)r_1} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B-a_{11}^{-1}XX^T \end{pmatrix}$$

例 2 设 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & X^T \\ X & a_{nn} \end{pmatrix}$，如果 A_{n-1} 正定，且 $a_{nn}-XA_{n-1}^{-1}X^T>0$，则 A 正定.

提示

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & X^T \\ X & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1(-A_{n-1}^{-1}X^T)} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ X & a_{nn}-XA_{n-1}^{-1}X^T \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+(-XA_{n-1}^{-1})r_1} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-XA_{n-1}^{-1}X^T \end{pmatrix}$$

例 3 设 A 是 n 阶实可逆矩阵，求 $B=\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数.

提示

$$B=\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2A^{-1}} \begin{pmatrix} E & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+(A^T)^{-1}r_2} \begin{pmatrix} 2E & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_1(-\frac{1}{2}A)} \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ A^T & -\frac{1}{2}A^TA \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+(-\frac{1}{2}A^T)r_1} \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A^TA \end{pmatrix}$$

例 4 设$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$正定，证明：$C-B^TA^{-1}B$也正定.

提示 A 正定，从而A可逆.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1(-A^{-1}B)} \begin{pmatrix} A & 0 \\ B^T & C-B^TA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+(-A^{-1}B)^T r_1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C-B^TA^{-1}B \end{pmatrix}$$

6. 分块初等变换与相似

命题 以下三种变换是分块矩阵的相似变换:

（1）对分块矩阵$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$列互换，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$行互换;

（2）将分块矩阵第$\boldsymbol{i}$列右乘可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，第$\boldsymbol{i}$行左乘可逆矩阵$\boldsymbol{C}^{-1}$;

（3）将分块矩阵的第$\boldsymbol{j}$列右乘矩阵$\boldsymbol{C}$加到第$\boldsymbol{i}$列，第$\boldsymbol{i}$行左乘矩阵$-\boldsymbol{C}$加到第$\boldsymbol{j}$行

如：设 $$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2C} \begin{pmatrix} A_{11}+A_{12}C & A_{12} \\ A_{21}+A_{22}C & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-Cr_1} \begin{pmatrix} A_{11}+A_{12}C & A_{12} \\ A_{21}+A_{22}C-CA_{11}-CA_{12}C & A_{22}-CA_{12} \end{pmatrix}=B$$

则$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -C & E \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} E & 0 \\ C & E \end{pmatrix}=B$，　即$\begin{pmatrix} E & 0 \\ C & E \end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix} E & 0 \\ C & E \end{pmatrix}=B$。

命题 分块矩阵的相似变换不改变特征多项式.

例 1 设 A 是 n 阶方阵，$B=\begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix}$.

证明：(1) B 相似于 $\begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；（2） $f_B(\lambda)=2\lambda^n f_A(\lambda)$.

提示

$$B=\begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix}\xrightarrow{c_2+c_1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix} 2A & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1-\frac{1}{2}c_2}\begin{pmatrix} 2A & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 2 设 A 是 n 阶方阵， $B=\begin{pmatrix} A & -A \\ A & -A \end{pmatrix}$.

证明：(1) B 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$；（2） $f_B(\lambda)=\lambda^{2n}$.

提示

$$B=\begin{pmatrix} A & -A \\ A & -A \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

结论：探索分块矩阵的初等变换的“变”与“不变”，可以解决《高等代数》与《线性代数》中的许多问题、难题。

谢谢！欢迎批评指正！

zqlin@hqu.edu.cn